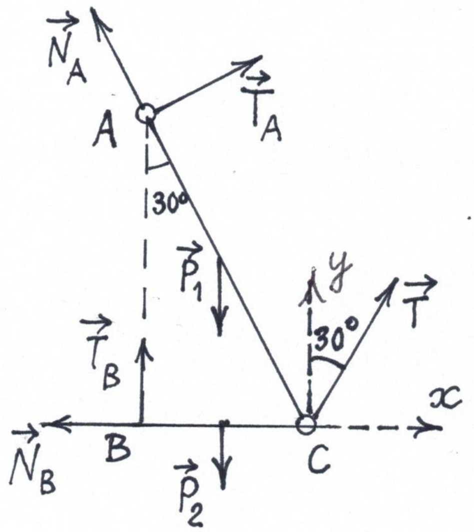
Olimpiada de mecanică teoretică la UTM, 29 aprilie 2024.

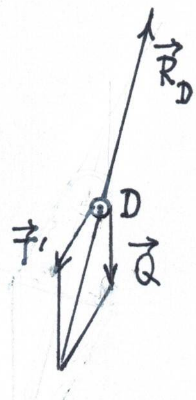
Seria: 4 credite la MT

Problema 1. Se dă: P_1= 100 N, P_2= 50 N, Q= 200 N, m($\measuredangle BAC$)=30°.

Să se afle: a) T_A, T_B; b) N_A, N_B ; c) R_D.

Rezolvare. Examinăm echilibrul scripetelui. Asupra lui acționează trei forțe concurente: $\vec{Q}$, $\overrightarrow{T^1}$, $\overrightarrow{R_D}$. Din ecuația momentelor forțelor în raport cu axa de rotație a scripetelui rezultă că T^1= Q= 200 N. Sistemul de bare se află în echilibru sub acțiunea forțelor: $\overrightarrow{P_1}$, $\overrightarrow{P_2}$, $\overrightarrow{T_A}$, $\overrightarrow{T_B}$, $\overrightarrow{N_A}$, $\overrightarrow{N_B}$, $\vec{T}$.





a) Din ecuația momentelor $\sum M_C^{AC}$= $P_1 \frac{AC}{2}$ sin 30°- T_A ·AC= 0 rezultă T_A= 25 N, **2 p**

iar din ecuația momentelor $\sum M_C^{BC}$= $P_2 \frac{BC}{2}$ - T_B ·BC= 0 obținem T_B= 25 N. **2 p**

b) Din ecuația momentelor tuturor forțelor în raport cu punctul B

$\sum M_B$= N_A sin 30°AB - T_A cos 30°AB – (P_1+P_2)$\frac{BC}{2}$ + Tcos 30°BC= 0 și relația $\frac{AB}{BC}$ = tan 60°=$\sqrt{3}$ rezultă N_A= - 70 N. **2 p**

Din ecuația momentelor tuturor forțelor în raport cu punctul A

$$\sum M_A = -(P_1 + P_2)\frac{BC}{2} + T\cos 30° \cdot BC + T\sin 30° \cdot AB - N_B \cdot AB = 0$$

calculăm N_B=156,7 N. **2 p**

Verificare. $\sum F_x$=- $N_A \cdot \cos 60°$+$T_A \cos 30°$ +Tsin 30° $- N_B$ =70· 0,5+25·$\frac{\sqrt{3}}{2}$+200·$\frac{1}{2}$–156,7 =0.

c) Din condiția de echilibru al scripetelui $\vec{Q}$ +$\overrightarrow{T^1}$+$\overrightarrow{R_D}$ = 0 calculăm R_D.

R_{Dx}=T^1 sin 30°= 100 N,

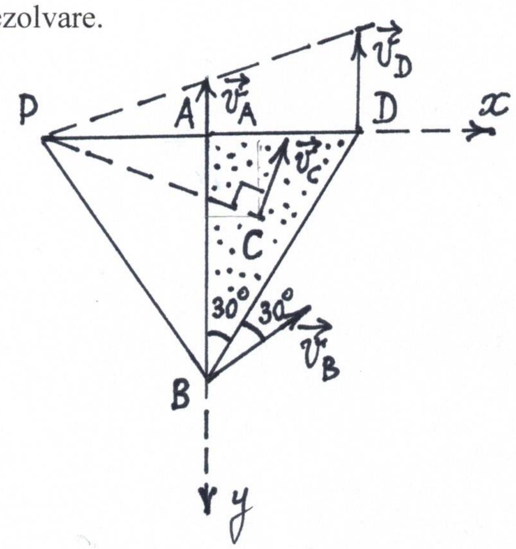
R_{Dy}=T^1 sin 60°+Q =100$\sqrt{3}$ + 200=373,2 N. R_D=$\sqrt{{R_{Dx}}^2 + {R_{Dy}}^2}$ = 386 N. **2 p**

Răspuns: a) T_A= 25 N, T_B= 25 N; b) N_A= - 70 N, N_B= 156,7 N; c) R_D= 386 N.

Problema 2. Se dă: AD =1 m, v_B=2 $\frac{m}{s}$, $\overrightarrow{v_A}$ ⊥AD, m(∡ABD)=30°, m(∡$DB\overrightarrow{v_B}$)=30°.

Să se afle: a) v_A, AP; b) ω; c) v_D; d) x_C, y_C; e) v_C.

Rezolvare.



a) Conform teoremei fundamentale a cinematicii rigidului $v_A \cos 0°= v_B \cos 60°$,
v_A= 1 $\frac{m}{s}$. **1 p**

Totodată $BD=2AD$=2 m. Centrul instantaneu al vitezelor plăcii P se află la intersecția perpendicularelor duse la vitezele $\overrightarrow{v_A}$ și $\overrightarrow{v_B}$. Triunghiul BDP este echilateral și PD=DB=BP=2 m. AB este mediană și înălțime. AP=AD=1 m. **1 p**

b) Viteza unghiulară a plăcii $\omega = \frac{v_A}{AP} = 1 \frac{rad}{s}$. **1 p**

c) Calculăm viteza punctului D. v_D=$\omega \cdot PD$= 2 $\frac{m}{s}$. **1 p**

Verificare. $v_D \cos 30°= v_B \cos 30°$, rezultă v_D=v_B= 2 $\frac{m}{s}$.

Viteza unghiulară a plăcii poate fi calculată conform formulei **2 p**

ω=(v_D sin 30°+v_B sin 30°)/BD =1 $\frac{rad}{s}$.

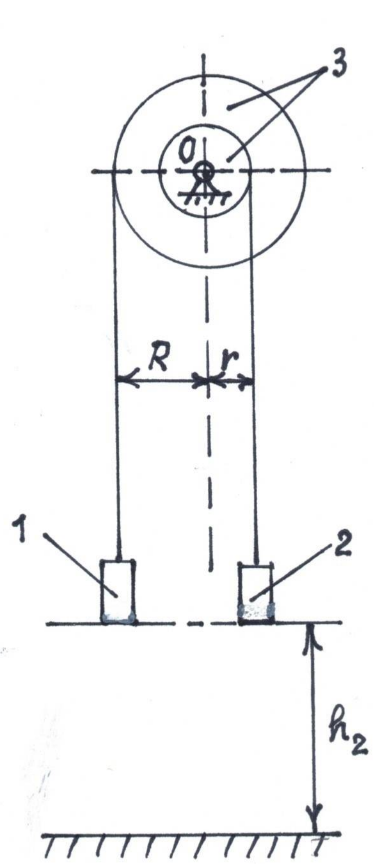
d) Legăm rigid de placă sistemul de coordonate Axy. Calculăm coordonatele centrului de greutate al plăcii

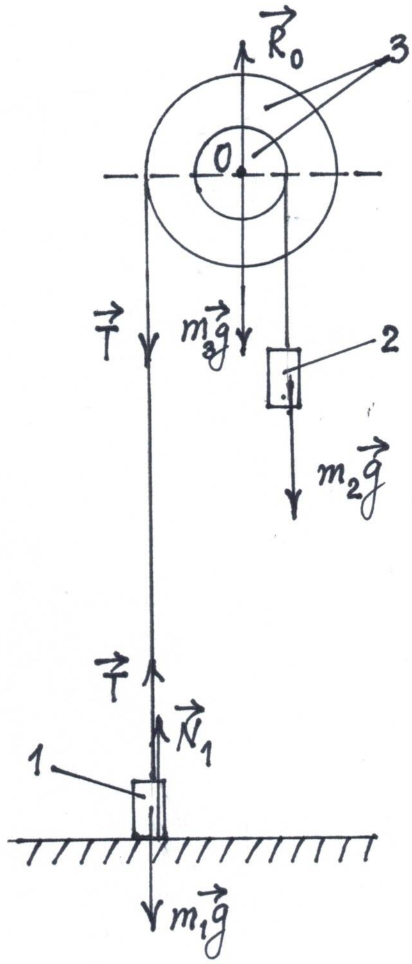
x_C= $\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_D)$=$\frac{1}{3}$ m, y_C= $\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_D)$=$\frac{\sqrt{3}}{3}$ m. **2 p**

e) Calculăm viteza centrului de greutate al plăcii v_C=ω ·PC, unde

PC=$\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$ =1,45 m. v_C=1,45 $\frac{m}{s}$. Viteza $\overrightarrow{v_C}$ este orientată perpendicular pe segmentul PC. **2 p**

Răspuns: a) v_A= 1 $\frac{m}{s}$, AP= 1 m; b) ω = 1 $\frac{rad}{s}$; c) v_D= 2 $\frac{m}{s}$; d) x_C=$\frac{1}{3}$ m, y_C=$\frac{\sqrt{3}}{3}$ m, e) v_C=1,45 $\frac{m}{s}$.


3
O
R
r
1
2
h2


R0
3
O
T
m3g
2
m2g
T
N1
1
m1g

Problema 3. Se dă: m_1=5 kg, m_2=8 kg, m_3=2,5 kg, r=0,2 m, R=0,4 m, h_2= 1 m, ρ=0,32 m, g=10 $\frac{m}{s^2}$.

Să se afle: a) $E_c(v_2)$; b) L ; c) v_2; d) H_2 ; e) N_1; f) R_o.

Rezolvare. a) Energia cinetică a sistemului ca funcție de viteza v_2 înainte de ciocnire a corpului 1 cu podeaua:

E_c=E_{c1}+E_{c2}+E_{c3}, unde $E_{c1}=\frac{m_1v_1^2}{2}$, $E_{c2}=\frac{m_2v_2^2}{2}$, $E_{c3}=\frac{I\omega^2}{2}$, $I=m_3\rho^2$, $\omega=\frac{v_2}{r}=\frac{v_1}{R}$.

$$E_c = \frac{m_1}{2}\left(\frac{Rv_2}{r}\right)^2 + \frac{m_2v_2^2}{2} + \frac{m_3\rho^2}{2}\left(\frac{v_2}{r}\right)^2 = \frac{v_2^2}{2}\left(m_1 \cdot 4 + m_2 + m_3\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right) = \frac{v_2^2}{2}\left(5\cdot 4 + 8 + 2{,}5\left(\frac{0{,}32}{0{,}2}\right)^2\right) =$$
$=17{,}2v_2^2$. **2 p**

b) Lucrul efectuat de forțele de greutate până la ciocnirea corpului 1 cu podeaua

$L=(m_1+\frac{m_2}{2})gh_2$=(5-4)· 10 · 1=10 J. **1 p**

c) Calculăm viteza corpului 2 în momentul ciocnirii corpului 1 cu podeaua

E_c- E_{c0}=L, unde E_{c0}=0, $17{,}2v_2^2=10$, $v_2=0{,}762\ \frac{m}{s}$. **1 p**

d) După ciocnirea corpului 1 cu podeaua mișcarea corpurilor 2 și 3 continuă până la oprirea lor. Energia cinetică a corpurilor 2 și 3 va fi:

$$E_c^1=\frac{m_2v_2^2}{2}+\frac{m_3\rho^2}{2}\left(\frac{v_2}{r}\right)^2=\frac{v_2^2}{2}\left(8+2{,}5\left(\frac{0{,}32}{0{,}2}\right)^2\right)=7{,}2v_2^2.$$ **1 p**

Lucrul efectuat de forța de greutate a corpului 2 la ridicarea lui de la nivelul 1,5 m de la podea până la înălțimea maximă H_2 va fi

L= - m_2g(H_2- 1,5)= - 80(H_2- 1,5). **1 p**

Energia cinetică a corpurilor 2 și 3 în momentul când corpul 2 atinge înălțimea maximă este nulă.

$-7{,}2v_2^2=-80(H_2-1{,}5)$, $H_2=1{,}5+\frac{72}{80\cdot 17{,}2}=1{,}552$ m. **1 p**

e) În starea de repaus a roții 3 avem: $\sum M_o=T\cdot R-m_2gr=0$, $T=\frac{m_2}{R}gr$=40 N. **1 p**

Ecuația de echilibru al corpului 1 este $T+N_1-m_1g=0$, rezultă N_1= 10 N. **1 p**

f) Din ecuația de echilibru al roții $R_o - T - (m_2+m_3)g=0$

avem R_o=(8+2,5)·10 + 40=145 N. **1 p**

Răspuns: a) $E_c(v_2)= 17{,}2v_2^2$, b) L=10 J, c) $v_2=0{,}762\ \frac{m}{s}$, d) H_2=1,552 m, e) N_1= 10 N, f) R_o= 145 N.

Subiectele și baremul au fost propuse de conf.univ. dr. Mihai Țopa

Olimpiada de mecanică teoretică la UTM, 29 aprilie 2024

Seria: 5 credite la MT

Problema 1. Se dă: AD=2 m, P=120 N, AB=1,5 m, m($\measuredangle O_1$AB)=60°, m($\measuredangle O_1$BA)=45°, m($\measuredangle O_2$BD)=30° .

Să se afle: a) T_1, T_2, T_3; b) T_1^1, T_2^1; c) T_2^{11}, T_3^{11}.

Rezolvare. a) $\sum M_B$= P·BC - $T_1 \cdot \sin 60°$ ·AB = 0, $T_1 = \frac{120 \cdot 0{,}5}{1{,}5 \cdot \sin 60°}$ = 46,138 N. **1 p**

$\sum F_x = T_1 \cdot \cos 60°$ - $T_2 \cdot \cos 45°$+ $T_3 \cdot \cos 30°$= 0,

$\sum F_y = T_1 \cdot \sin 60° - T_2 \cdot \sin 45° + T_3 \cdot \sin 30°$ - P = 0, Rezolvând sistemul de ecuații, obținem T_2= 83,680 N și T_3= 41,658 N. **2 p**

Verificare. $\sum M_D$= - $T_1 \cdot \sin 60° \cdot 2 + P \cdot 1$ - $(T_2 \cdot \sin 45° + T_3 \cdot \sin 30°)$·0,5 = 0. **1 p**

b) Notăm cu θ unghiul format de grinda AD cu orizontala în poziție de echilibru.

Calculăm lungimea cablurilor O_1A și O_1B.

O_1A=l_1 și O_1B=l_2. $l_1 \cdot \cos 60°$+ $l_2 \cdot \cos 45°$=1,5; $l_1 \sin 60° = l_2 \cdot \sin 45°$. Rezolvând sistemul, obținem l_1= 1,0981 m și l_2= 1,3449 m.

În poziția de echilibru al grinzii punctele C și O_1trebuie să fie pe aceeași verticală.

$\tan\theta = \frac{CE}{O_1E}$, CE=AC- $l_1 \cdot \cos 60°$, O_1E=$l_1 \sin 60°$, $\tan\theta$=0,4742, θ=25°, 37. **2 p**

Din ecuația momentelor în raport cu punctul B

$$\sum M_B = - T_1^1 \cdot \sin 60° \cdot AB + P \cdot BC \cdot \cos\theta = 0,$$

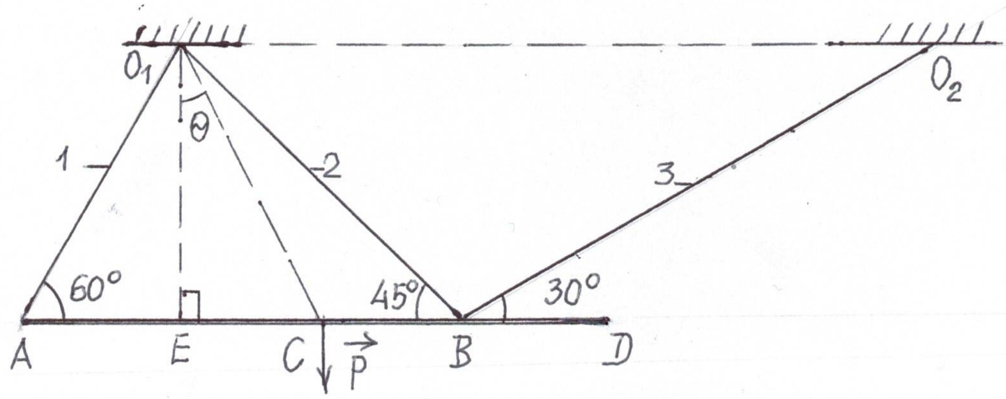
Avem T_1^1=41,73 N, iar din ecuația momentelor în raport cu punctul A **1 p**

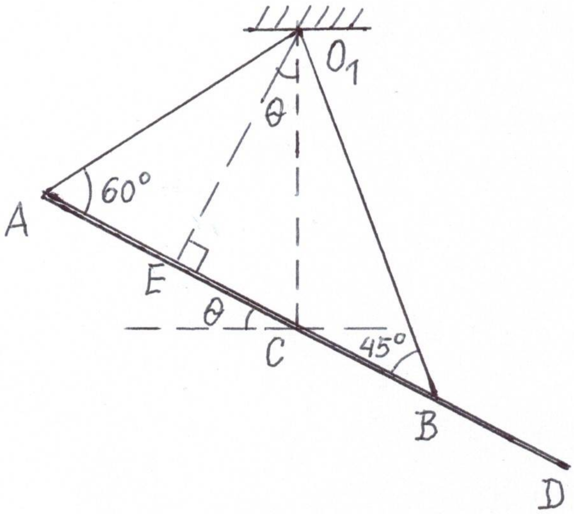
$$\sum M_A = - P \cdot AC \cdot \cos\theta + T_2^1 \cdot AB \cdot \sin 45° = 0, \quad T_2^1 = 102{,}2 \text{ N}.$$ **1 p**

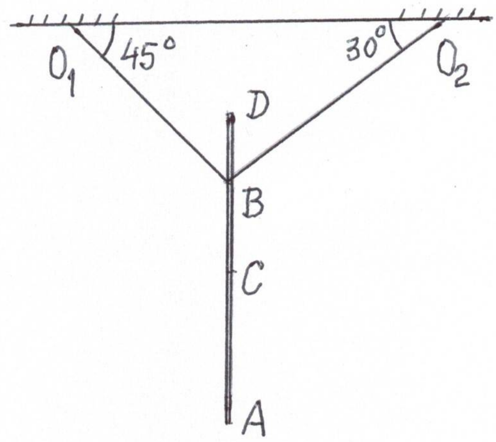
c) În cazul când grinda este suspendată de cablurile 2 și 3,grinda ocupă poziția verticală și ecuațiile de echilibru pot fi scrise astfel

$\sum F_x$= - $T_2^{11} \cdot \cos 45°$+$T_3^{11} \cdot \cos 30°$= 0, $\sum F_y = T_2^{11} \cdot \sin 45°$+$T_3^{11} \cdot \sin 30°$ - P= 0.

$T_3^{11} = \frac{P}{\sin 30° + \cos 30°}$ = 87,8 N, $T_2^{11} = T_3^{11} \cdot \frac{\cos 30°}{\cos 45°}$ = 107,6 N. **2 p**







Problema 2. Se dă: m($\sphericalangle ABD$)= 30°, AD= 1 m, AB= $\sqrt{3}$ m, v_B= 2 $\frac{m}{s}$, a_D= 3,1545 $\frac{m}{s^2}$.

Să se afle: a) ω; b) v_C; c) ε; d) a_C.

Rezolvare. a) Conform teoremei fundamentale a cinematicii rigidului

$$v_B \cdot \cos 30° = v_D \cdot \cos 30°, \text{ deci } v_D = v_B = 2\,\frac{m}{s},$$

iar viteza unghiulară a plăcii $\omega = \frac{v_D \cdot \sin 30° + v_B \cdot \sin 30°}{BD} = 1\,\frac{rad}{s}$. **1 p**

Centrul instantaneu al vitezelor plăcii se află la intersecția perpendicularelor duse la vitezele $\overrightarrow{v_B}$ și $\overrightarrow{v_D}$, pe care îl vom nota cu P, adică v_P= 0.

b) Legăm cu placa sistemul de coordonate Axy. În acest sistem centrul de greutate C al plăcii are coordonatele

$$x_C = \frac{1}{3}(x_A + x_D + x_B) = \frac{1}{3}\text{ m}, \quad y_C = \frac{1}{3}(y_A + y_D + y_B) = \frac{\sqrt{3}}{3}\text{ m}.$$ **1 p**

Calculăm distanța PC=$\sqrt{((PA + x_C)^2 + y_C^2\ )}$= $\frac{\sqrt{19}}{3}$ m. Viteza centrului de greutate

$$v_C = \omega \cdot PC = \frac{\sqrt{19}}{3} = 1,45\,\frac{m}{s}.$$ **1 p**

c) Relația dintre accelerațiile punctelor D și B este $\overrightarrow{a_D} = \overrightarrow{a_B} + \overrightarrow{a_{DB}^c} + \overrightarrow{a_{DB}^r}$, unde $a_{DB}^c = \omega^2 \cdot BD = 2\,\frac{m}{s^2}$, $a_{DB}^r = \varepsilon \cdot BD$. Proiectăm ecuația vectorială pe axele Dξ $și$ $D\eta$:

$$a_D = a_B \cdot \cos 60° + a_{DB}^r, \quad 0 = -\,a_B \cdot \cos 30° + a_{DB}^c.$$

Rezolvând sistemul de ecuații, obținem $a_B = \frac{a_{DB}^c}{\cos 30°} = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{m}{s^2}$, a_{DB}^r=3,1545 - $\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = 2\frac{m}{s^2}$. **2 p**

Accelerația unghiulară a plăcii $\varepsilon = \frac{a_{DB}^r}{BD} = 1\,\frac{rad}{s^2}$ și este orientată contra mersului acelor de ceasornic.

Poziția centrului instantaneu al accelerațiilor plăcii se determină cu ajutorul unghiului μ

$\tan\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 1$, μ=45° și a distanței BQ= $\frac{a_D}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}} = \frac{3{,}1545}{\sqrt{2}} = 2{,}231$ m. **2 p**

d) Accelerația centrului de greutate al plăcii $\overrightarrow{a_C} = \overrightarrow{a_D} + \overrightarrow{a_{CD}^c} + \overrightarrow{a_{CD}^r}$, unde $a_{CD}^c = \omega^2 \cdot$CD=

$= \sqrt{(AD - x_C)^2 + {y_C}^2} = \sqrt{(1-\frac{1}{3})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{\sqrt{7}}{3}\frac{m}{s^2}$, $a_{CD}^r = \varepsilon \cdot$CD= $\frac{\sqrt{7}}{3}\frac{m}{s^2}$.

$\tan\theta = \frac{y_C}{(AD - x_C} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \sqrt{\frac{3}{7}}$, $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Proiectăm ecuația vectorială pe axele Ax și Ay.

a_{Cx}= - $a_D \cos 30° + a_{CD}^c \cdot \cos\theta + a_{CD}^r \cdot \sin\theta$= - 1,488 $\frac{m}{s^2}$,

a_{Cy}= - $a_D \sin 30° - a_{CD}^c \cdot \sin\theta + a_{CD}^r \cdot \cos\theta$= - 1,488 $\frac{m}{s^2}$,

$a_C = \sqrt{{a_{Cx}}^2 + {a_{Cy}}^2} = 1{,}488\sqrt{2} = 2{,}104\ \frac{m}{s^2}$. **2 p**

Verificare. Coordonatele centrului instantaneu al acceleraților Q

x_Q= - DQ· cos 15°+ AD= - 2 231· cos 15°+1= - 1,155 m.

y_Q= DQ· sin15°= 0,577 m. CQ= $\sqrt{(x_Q - x_C)^2 + (y_Q - y_C)^2}$

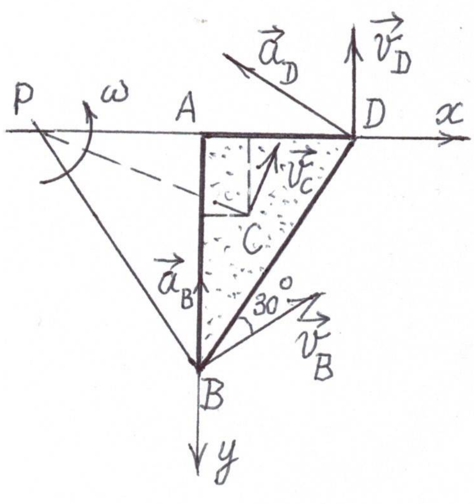
$= \sqrt{(-1{,}155 - \frac{1}{3})^2 + (0{,}577 - \frac{1}{\sqrt{3}})^2}$ =1,488 m.

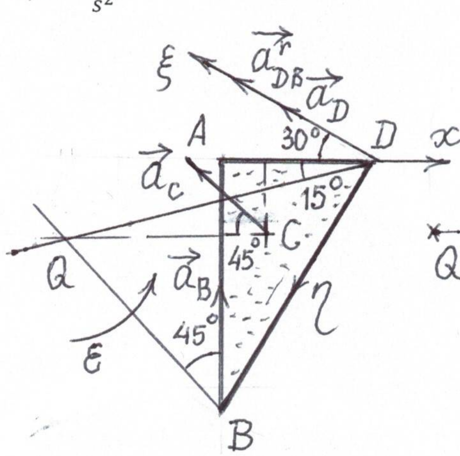
Accelerația centrului de greutate C poate fi calculată și astfel

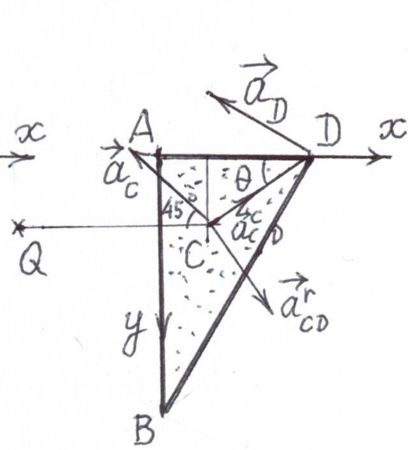
a_C=CQ· $\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$=1,488· $\sqrt{2}$ =2,104 $\frac{m}{s^2}$. **1 p**

Răspuns: a) ω= 1 $\frac{rad}{s}$; b) $x_C = \frac{1}{3}$ m, $y_C = \frac{\sqrt{3}}{3}$ m, v_C= 1,45 $\frac{m}{s}$; c) ε=1 $\frac{rad}{s^2}$, μ=45°,

BQ= 2,231 m; d) a_C= 2,104 $\frac{m}{s^2}$.



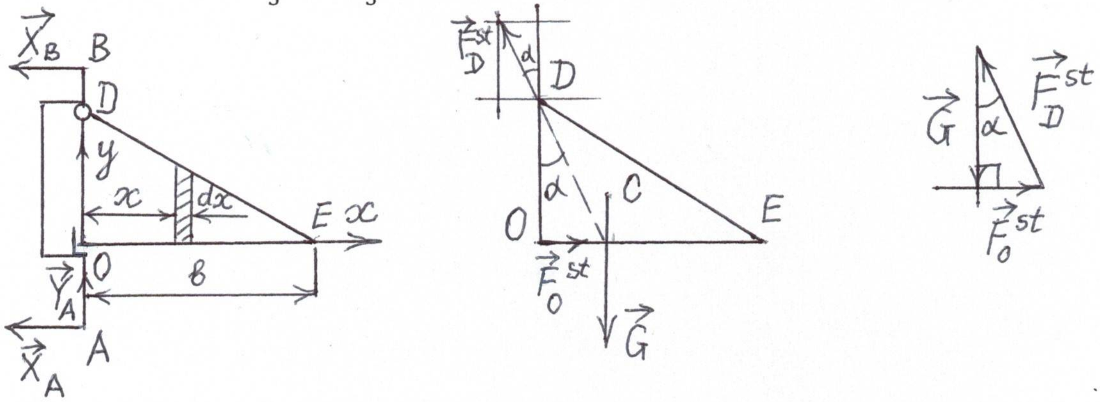




Problema 3. Se dă: OE=b, OD=h, BD=$\frac{h}{4}$, AO= $\frac{h}{2}$.

Să se afle: a) F_O^{st}; b) F_D^{st}; c) $\vec{\Phi}$; d) M_D^{ϕ}; e) ω_1; f) X_A, X_B .

Rezolvare. a) Fixăm de placă sistemul de coordonate Oxy. Centrul de greutate al plăcii are coordonatele $x_C=\frac{b}{3}$, $y_C=\frac{h}{3}$. G= mg.



Placa se află în echilibru sub acțiunea a trei forțe concurente: $\vec{G}$, $\overrightarrow{F_O^{st}}$ și $\overrightarrow{F_D^{st}}$. Condiția de echilibru $\vec{G}+\overrightarrow{F_O^{st}}+\overrightarrow{F_D^{st}}= 0$ sau în formă de ecuații scalare

$\sum F_x=F_O^{st}$ - $F_D^{st}\cdot \sin\alpha= 0$, $\quad \sum F_y=F_D^{st}\cdot\cos\alpha$ – G= 0 și rezolvând, obținem

F_O^{st} = mg$\cdot\tan\alpha$, $\tan\alpha=\frac{b}{3h}$, F_O^{st}=mg$\cdot\frac{b}{3h}$. **1 p**

b) F_D^{st}=mg$\sqrt{(\frac{b}{3h})^2+1}$. **1 p**

c) $\Phi=\int_0^b \omega^2 x\cdot dm = \omega^2\cdot\frac{m}{\frac{bh}{2}}\int_0^b xydx$, $\frac{h}{b}=\frac{y}{b-x}$, $y=\frac{(b-x)\cdot h}{b}$, $\Phi=\frac{2m\omega^2}{bh}\cdot\frac{h}{b}\int_0^b x(b-x)dx =$

$=\frac{2m\omega^2}{b^2}\cdot\left(\frac{b^3}{2}-\frac{b^3}{3}\right)=\frac{m\omega^2}{3}b$, sau $\Phi=m\omega^2 x_C=\frac{m\omega^2 b}{3}$. **2 p**

d) Momentul rezultant al forțelor de inerție în raport cu punctul D $M_D^{\phi}=\int_0^b(h-\frac{y}{2})d\Phi=$

$=\frac{2m\omega^2}{b^2}\int_0^b(h-\frac{b-x}{2b}h)\cdot x\cdot(b-x)dx=\frac{2mh\omega^2}{2b^3}\int_0^b(b+x)\cdot x\cdot(b-x)dx=$

$=\frac{mh\omega^2}{b^3}(\frac{b^4}{2}-\frac{b^4}{4})=\frac{mhb\omega^2}{4}$. **2 p**

e) În cazul când F_O= 0 $\sum M_D^{DEO}$= -mg$\cdot x_C$+ M_D^{ϕ}= 0, $\frac{mhb\omega_1^2}{4}=\frac{mgb}{3}$, $\omega_1=2\cdot\sqrt{\frac{g}{3h}}$. **2 p**

f) Determinăm reacțiunile dinamice ale crapodinei A și a rulmentului B în cazul când viteza unghiulară este egală cu ω_1.

$\sum M_D=X_B\cdot\frac{h}{4}$ - $X_A\cdot 1{,}5h = 0$, $\quad\sum F_x$= -$X_A - X_B+\phi_1$= 0,

2 p

Obținem $X_A = \frac{mb\omega_1^2}{21}$ și $X_B = \frac{2mb\omega_1^2}{7}$.

Răspuns. a) $F_O^{st} = mg \cdot \frac{b}{3h}$; b) $F_D^{st} = mg\sqrt{(\frac{b}{3h})^2 + 1}$; c) $\Phi = \frac{m\omega^2 b}{3}$; d) $M_D^{\phi} = \frac{mhb\omega^2}{4}$;

e) $\omega_1 = 2 \cdot \sqrt{\frac{g}{3h}}$; f) $X_A = \frac{mb\omega_1^2}{21}$, $X_B = \frac{2mb\omega_1^2}{7}$.

Subiectele și baremul propuse de conf. univ. dr. Mihai Țopa